

Mémoire M1
**Introduction aux C^* -algèbres et
application aux groupes discrets**

Ilayda Demir
sous la direction de Georges Skandalis

Université Paris Cité
M1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Janvier-Mai 2025

Je tiens à remercier Monsieur Skandalis pour son parfait encadrement, pour les connaissances qu'il m'a transmises, pour ses corrections (en mathématiques, en français et en $\text{\LaTeX}$), pour sa patience et ses encouragements.

Introduction

Ce mémoire d'initiation à la recherche consiste en une introduction aux C^* -algèbres et une application aux groupes discrets qui vise à associer à un groupe discret une C^* -algèbre.

Table des matières

1	C^*-algèbres : Introduction	3
1.1	Algèbres de Banach	3
1.1.1	Théorie Spectrale	3
1.1.2	Théorie de Gelfand	7
1.1.3	Algèbres de Banach involutives	10
1.2	C^* -algèbres	10
1.2.1	Éléments positifs dans une C^* -algèbre	12
1.2.2	C^* -algèbres enveloppantes	14
1.2.3	Représentations	15
2	C^*-algèbre d'un groupe discret	16
2.1	Groupes discrets et C^* -algèbres	16
2.1.1	Représentations unitaires et l'algèbre de groupe	16
2.1.2	C^* -algèbre de groupe	19
2.1.3	C^* -algèbre d'un groupe abélien	20
2.1.4	Cas des groupes abéliens finis	22
2.1.5	Cas des groupes finis non abéliens	24

Chapitre 1

C^* -algèbres : Introduction

Dans cette première partie, avant de donner la définition d'un C^* -algèbre, on passe un peu de temps avec les algèbres de Banach et la théorie spectrale.

1.1 Algèbres de Banach

Une **espace de Banach** A est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé qui est complet.

Une **algèbre de Banach** A est un espace de Banach avec une structure de $\mathbb{C}$ -algèbre pour laquelle la norme est sous-multiplicative :

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in A$$

On dit que A est **unifère** si A possède un élément neutre pour la multiplication que l'on notera $\mathbf{1}$, et que A est **commutative** si elle l'est pour la multiplication.

1.1.1 Théorie Spectrale

Si A est une algèbre de Banach non unifère, on peut toujours la voir comme une sous-algèbre d'une algèbre unifère : $A \times \mathbb{C}$ avec la norme

$$\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$$

munie de la multiplication :

$$((x, \lambda), (y, \mu)) \mapsto (\mu x + \lambda y + xy, \lambda \mu)$$

est une algèbre de Banach unifère notée $\tilde{A}$ où $(0, 1)$ est l'élément neutre. $\tilde{A}$ est commutative si et seulement si A l'est.

Dans cette partie, on suppose que A est une algèbre de Banach unifère. On note $Inv(A)$ ses éléments inversibles. Pour un élément $x \in A$ on définit le **spectre de x** :

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda \notin Inv(A)\}$$

Lemme 1.1. *Soit A une algèbre de Banach unifère. Soient $x, y \in A$. $1 - xy \in Inv(A)$ si et seulement si $1 - yx \in Inv(A)$.*

Démonstration. En effet il suffit de voir que si $1 - xy \in Inv(A)$, $1 + x(1 - xy)^{-1}y$ est l'inverse de $1 - yx$. $\square$

Proposition 1.2. *Soit A une algèbre de Banach unifère. Pour tout $x, y \in A$, $\sigma(xy) = \sigma(yx)$*

Lemme 1.3. *$Inv(A)$ est ouvert. De plus $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in A$ tel que $|\lambda| > \|x\|$ on a $\lambda \notin \sigma(x)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda(\lambda - x)^{-1} - 1\| = 0$*

Démonstration. En effet pour $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$, il est facile de voir que $1 - x \in Inv(A)$ d'inverse $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$. Cette série est absolument convergente donc convergente. De là si x est inversible il suffit de prendre la boule $B(x, \frac{1}{\|x\|})$. Donc A est ouvert. Ensuite posons $a = x\lambda^{-1}$. Comme $\|a\| < 1$ on a $1 - a$ inversible, donc en multipliant par λ , $\lambda - x$ est inversible et $\lambda(\lambda - x)^{-1} = (1 - a)^{-1}$. Comme $\|(1 - a)^{-1} - 1\| = \|\sum_{n=1}^{+\infty} a^n\| \leq \frac{\|a\|}{1 - \|a\|}$ d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.4. *Pour tout $x \in A$, $\sigma(x) \neq \emptyset$ et $\sigma(x)$ est compact.*

Avant de commencer la preuve, rappelons un résultat de l'analyse complexe (Théorème de Liouville) sans démontrer :

Théorème 1.5. *Toute fonction entière bornée est constante*

Démonstration. Si $x = 0$, $\sigma(0) = \{0\}$. Soit $x \in A$ non nul. Observons que si $\sigma(x)$ était vide, on aurait pour toute forme linéaire continue $l : A \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto l((z - x)^{-1})$ est entière, et tend vers 0 lorsque z tend vers l'infini, donc constante de valeur 0 sur A par le théorème de Liouville. Mais par le théorème de Hahn Banach, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in A'$

et non nul en x^{-1} , absurde.

Pour la compacité, comme $Inv(A)^c$ est fermé, et que $\sigma(x) = f_x^{-1}(Inv(A)^c)$ où $f_x(z) = x - z$ continue car polynomiale, on a $\sigma(x)$ fermé. De plus comme $\sigma(x)$ est borné par $\|x\|$, on a la compacité par la caractérisation fermé-borné en dimension finie. $\square$

Ensuite on définit le **rayon spectrale** de x :

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$$

Théorème 1.6. $\forall x \in A$, $\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ converge et on a l'égalité :

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

et $\rho(x) \leq \|x\|$.

Démonstration. On admet le résultat suivant :

Lemme 1.7. Soit X une partie compacte de $\mathbb{C}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $\mathbb{C}$ égale à 1 dans un voisinage ouvert de X . Soit K le support de φ . Pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K et pour tout $\lambda \in K$ on a :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_U f(z)(z - \lambda)^{-1} dz \wedge d\varphi$$

On a aussi le lemme suivant :

Lemme 1.8. Soit u_n une suite de nombres dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $(n+p)u_{n+p} \leq nu_n + pu_p$. Alors u_n tend vers $\inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$. Par récurrence on a $u_{km} \leq u_m$. Posons $n = km + r$ pour $0 \leq r < m$, on a $u_n \leq n^{-1}(kmu_m + ru_1) = u_m + \frac{r(u_1 - u_m)}{n}$. Ainsi il vient $\limsup u_n \leq u_m$. $\square$

Retournons à la démonstration du théorème. Pour $u_n = \log(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})$, on a la convergence de la $\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Posons $r = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$ et $\rho = \lim(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})$. Maintenant montrons par double inégalité que $r = \rho$. Si $|\lambda| > r$, $\sum \lambda^{-k} x^k$ converge et sa somme est $(1 - \lambda^{-1}x)^{-1}$. Pour $|\lambda| > \rho$ on a $1 - \frac{x}{\lambda}$ inversible. Ainsi, $r \leq \rho$. Soit R réel tel que $R > r$, et soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ qui vaut 1 au voisinage U de $\sigma(x)$ et 0 si $|z| \geq R$. On a :

$$x^n = \frac{1}{2i\pi} \int_U z^n (z - x)^{-1} dz \wedge d\varphi$$

Ainsi $\|x^n\| \leq kR^n$ avec k une constante, donc $R \geq r$, donc $\rho \leq r$. $\square$

Si A et B sont deux $\mathbb{C}$ -algèbres unifères, un **homomorphisme d'algèbres unifères** $f : A \rightarrow B$ est un morphisme linéaire tel que :

$$f(ab) = f(a)f(b) \text{ et } f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

Proposition 1.9. *Si A et B sont deux algèbres de Banach unifères et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme, alors pour tout $x \in A$ on a $\sigma(f(x)) \subset \sigma(x)$*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $\lambda - x \in \text{Inv}(A)$ alors $f(x) - \lambda \in \text{Inv}(B)$ $\square$

Théorème 1.10 (Gelfand-Mazur). *Si A est une algèbre de Banach unifère tel que $\text{Inv}(A) = A - 0$ alors $A = \mathbb{C}$*

Démonstration. Soit $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ l'injection canonique. On va montrer que i est surjective, donc bijective : soit $a \in A$. Comme $\sigma(a) \neq \emptyset$ on a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda - a \notin \text{Inv}(A)$ donc $\lambda = a$. $\square$

Proposition 1.11. *Tout idéal maximal d'une algèbre de Banach unifère est fermé.*

Démonstration. Soit $I \subset A$ un idéal maximal, en particulier $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$. Alors $\text{Inv}(A)$ étant ouvert, $\bar{I} \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$ (car sinon I étant dense dans $\bar{I}$, s'intersecterait avec $\text{Inv}(A) \cap \bar{I}$ d'où $\bar{I} \neq A$. Or $I \subset \bar{I}$ et I maximal, et $\bar{I}$ étant un idéal, on a $I = \bar{I}$ i.e. I est fermé. $\square$

Proposition 1.12. *Soit A une algèbre de Banach et $I \subset A$ un idéal fermé. Soit $q : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique, pour la norme quotient définie par $\|q(a)\| := \inf_{y \in I} \|a + y\|$, A/I est une algèbre de Banach.*

Démonstration. Le fait que A/I est une algèbre est directe. Montrons que la norme quotient est bien sous-multiplicative. Soient $a, b \in A$. Prenons $y, z \in I$ tels que $\|q(a)\| + \epsilon > \|a + y\|$ et $\|q(b)\| + \epsilon > \|b + z\|$. On a

$$\begin{aligned} (\|q(a)\| + \epsilon)(\|q(b)\| + \epsilon) &> \|a + y\| \|b + z\| \\ &\geq \|(a + y)(b + z)\| \\ &= \|ab + by + az + yz\| \\ &\geq \|q(ab)\| \end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, on a le résultat voulu. $\square$

1.1.2 Théorie de Gelfand

Dans cette partie on suppose que A est une algèbre de Banach commutative unifiée.

On définit le spectre de A :

$$Sp(A) = \{\chi : A \rightarrow \mathbb{C} \mid \chi \text{ morphisme continue non identiquement nul}\}$$

On munit $Sp(A)$ de la topologie de la convergence simple. On notera que sous cette topologie, $\chi \mapsto \chi(x)$ est continue sur $Sp(A)$, pour tout $x \in A$.

Parfois en anglais on appelle $Sp(A)$ "*maximal ideal space of A*". Le théorème suivant justifie ce nom et met en évidence le lien entre le spectre $\sigma(x)$ d'un élément $x \in A$ et $Sp(A)$.

Théorème 1.13. *Soit A une algèbre de Banach unifiée et commutative. Alors :*

- $Sp(A) \neq \emptyset$
- Tout idéal maximal $J \subset A$ est de la forme $Ker(h)$ pour un $h \in Sp(A)$
- Pour tout $x \in A$ on a $\sigma(x) = \{\chi(x) \mid \chi \in Sp(A)\}$
- $\|\chi\| = 1 \ \forall \chi \in Sp(A)$

Démonstration. Démontrons en même temps les deux premiers points. Rappelons qu'un idéal I est maximal si et seulement si A/I est un corps. Maintenant d'une part, le noyau d'un caractère est un idéal maximal; en effet soit $h \in Sp(A)$ et soit $J \neq Ker(h)$, $Ker(h) \subset J$. Prenons $b \in J - Ker(h)$ et alors pour tout $a \in A$, $a - h(a)h(b)^{-1}b \in Ker(h) \subset J$ donc $a \in J$ donc $A \subset J$. Si on a un idéal maximal J cherchons $h \in Sp(A)$ tel que $J = Ker(h)$. On a vu que J est fermé et que le quotient A/J est une algèbre de Banach avec la surjection canonique. Maintenant prenons $a \in A - J$ et définissons l'idéal M

$$M = \{ab + y \mid b \in A, y \in J\}$$

qui contient J maximal, donc $M = A$. Donc $\exists b, y$ tel que

$$1 = ab + y$$

ce qui implique

$$1 = q(a)q(b)$$

ce qui implique $q(a) \in \text{Inv}(A/J)$. Ceci étant vrai pour tout $a \neq 0$ dans A/J , par Gelfand-Mazur on a $A/J \cong \mathbb{C}$ donc en notant φ cet isomorphisme, $q \circ \varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est dans $Sp(A)$ de noyau J . Pour $x \in A$, on a $x \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow \forall \chi \in Sp(A), \chi(x) \neq 0$. En effet l'implication de gauche à droite vient par la proposition 1.9. Par l'absurde si x n'est pas inversible, l'idéal $\langle x \rangle$ est contenu dans un idéal maximal J qui est de la forme $\text{Ker}(h)$. Le dernier point est parce que $\sigma(x)$ est borné par $\|x\|$ et tout caractère atteint l'égalité en 1. $\square$

Théorème 1.14. *Soit A une algèbre de Banach unifère commutative. Alors $Sp(A)$ muni de la topologie de la convergence simple est compact.*

Démonstration. D'après le théorème d'avant, $Sp(A)$ est contenu dans la boule unité de l'espace dual A' . D'après Banach-Alaoglu, la boule unité de A' est compact pour la topologie faible dont la restriction à $Sp(A)$ coïncide avec la topologie de la convergence simple. Ainsi, il suffit de montrer que $Sp(A)$ est fermé et pour cela on remarque que :

$$Sp(A) = \{\chi \in A' \mid \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \forall a, b \in A\} \cap \{\chi \in A' \mid \chi(1) = 1\}$$

qui est fermé par l'intersection des fermés de A' . $\square$

Maintenant on va définir la transformation de Gelfand associé à un algèbre de Banach unifère et commutative.

Pour $a \in A$, par la définition de la topologie faible sur $Sp(A)$

$$\begin{aligned} \hat{a} : Sp(A) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \chi(a) \end{aligned}$$

est continue. On définit alors la **transformation de Gelfand** :

$$\begin{aligned} G : A &\rightarrow \mathcal{C}(Sp(A)) \\ a &\mapsto \hat{a} \end{aligned}$$

.

Proposition 1.15. *La transformation de Gelfand est un homomorphisme d'algèbres tel que $\forall a \in A$ on a $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$.*

Démonstration. — Pour $a, b \in A$, on pour tout $\chi \in Sp(A) : \chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b)$, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, $\chi(1) = 1$ Ainsi $\widehat{(\lambda a + b)} = \lambda \hat{a} + \hat{b}$, $\widehat{(ab)} = \hat{a}\hat{b}$, $\hat{1} = 1$

□

Exemples 1.16.

Si $A = \mathcal{C}(X)$ où X est compact, alors G est l'identité. Détaillons :

Observons que le morphisme d'évaluation en x est un caractère : $h_x \in Sp(\mathcal{C}(X))$:

$$h_x(f.g) = f(x)g(x) \text{ et } h_x(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

Et,

$$\begin{aligned} \phi : X &\rightarrow Sp(\mathcal{C}(X)) \\ x &\mapsto h_x \end{aligned}$$

est un **homéomorphisme**. ϕ est continue de nouveau par la topologie de la convergence simple sur l'ensemble d'arrivée.

Injectivité : Si $h_x = h_y$ alors pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, $f(x) = f(y)$ Mais si $x \neq y$ comme $\mathcal{C}(X)$ sépare les points, il existe f tel que $f(x) \neq f(y)$.

Surjectivité : Prenons $h \in Sp(\mathcal{C}(X))$. Montrons qu'il existe $x \in X$ tel que $h(f) = f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, montrons qu'il existe $x \in X$ tel que $Ker(h) = J_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\} = Ker(h_x)$. Comme $Ker(h)$ est maximal, on montre que les idéaux maximaux sont les J_x . Prenons J un idéal et un $f \in J$. Notons $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Si les U_f recouvrent X , par compacité il existe une partie finie T tel que $(U_f)_{f \in T}$ recouvrent X . Posons $h = \sum_{f \in T} |f|^2 \in J$. $U_h = X$ en particulier, donc h est inversible, donc $J = \mathcal{C}(X)$. Si $J \neq \mathcal{C}(X)$, il existe alors $x \in X$ tel que $f(x) = 0$ i.e. $f \in J_x$. Par le critère de Hausdorff-compacité on a un homéomorphisme.

Un exemple pathologique : On peut considérer un espace de Banach E comme une algèbre de Banach commutative en posant $xy = 0 \forall x, y \in E$, et dans ce cas $Sp(E) = \emptyset$, la transformation de Gelfand est $E \rightarrow \{0\}$.

La transformation de Gelfand n'est en général ni isomorphisme ni isométrie sur un quelconque algèbre de Banach.

1.1.3 Algèbres de Banach involutives

Une **algèbre de Banach involutive** est une algèbre de Banach munie d'un morphisme isométrique involutive antilinéaire et antisymétrique

$$\begin{aligned} * : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x^* \end{aligned}$$

autrement dit :

- $\|x^*\| = \|x\|$
- $(x^*)^* = x$
- $(x + \lambda y)^* = x^* + \bar{\lambda}y^*$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$
- $(x.y)^* = y^*.x^*$
- $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$

Exemple 1.17. Un exemple prototype est l'espace $B(H)$ d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H . Si $T \in B(H)$, T^* est caractérisé par : $\forall x, y \in H$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

.

Si A, B sont deux algèbres de Banach involutives, un ***-homomorphisme** $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres tel que $f(x^*) = f(x)^* \forall x \in A$.

1.2 C^* -algèbres

Une **C^* -algèbre** A est une algèbre de Banach involutive qui vérifie l'identité "norme- $*$ " pour tout $x \in A$

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

Remarque 1.18. On remarque que du fait de la sous-multiplicité de la norme, l'identité norme- $*$ est équivalent à l'inégalité $\|x\|^2 \leq \|xx^*\|$.

Dans une C^* algèbre unifère, on peut considérer les éléments qui sont en une certaine relation avec leur adjoint. On dit que :

- x est normal si $xx^* = x^*x$
- x est auto-adjoint si $x^* = x$

— x est unitaire si $xx^* = x^*x = 1$

Proposition 1.19. *Ces éléments vérifient les propriétés suivantes :*

1. Si x est unitaire alors $\sigma(x) \subset \mathbb{U}$
2. Si x est auto-adjoint alors $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$
3. $\sigma(x^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(x)\}$
4. Si x est normal alors $\rho(x) = \|x\|$

Démonstration. 1. Soit x unitaire, alors comme $\|x^*x\| = \|x\|^2 = 1$ on a $\rho(x) \leq 1$ et comme $x^{-1} = x^*$ et $\|x^*\| = \|x\|$, on a aussi $\rho(x^{-1}) \leq 1$, d'où $\sigma(x) \subset \mathbb{U}$.

2. Soit x auto-adjoint. Maintenant pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq \|x\|$, on a $x+it \in \text{Inv}(A)$ et $(x-it)(x+it)^{-1}$ est unitaire, et comme $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ on a $\sigma(x) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid (z-it)(z+it)^{-1} = 1\} = \mathbb{R}$.

3. Si $y = x - \lambda \in \text{Inv}(A)$, on a $y^*(y^{-1})^* = (y^{-1})^*y = 1$, ainsi $y^* = x^* - \bar{\lambda}$ est inversible d'inverse $(y^{-1})^*$.

4. Pour un élément auto-adjoint $x \in A$ on a par récurrence $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. Maintenant soit $u \in A$ normal. Il vient $(uu^*)^n = u^n(u^*)^n$ et donc $\|(uu^*)^n\| = \|u^n(u^n)^*\| = \|u^n\|^2$ donc $\rho(uu^*) = \rho(u)^2$ et comme uu^* est adjoint on a que $\rho(u)^2 = \|uu^*\| = \|u\|^2$. $\square$

Le dernier point est essentiellement important : c'est l'unicité de la norme $\|\cdot\|$ qui fait de A un C^* -algèbre : la norme d'un élément de C^* -algèbre ne dépend que de sa structure algébrique et de l'involution.

Théorème 1.20. *Soit A une C^* -algèbre commutative unifère. Alors la transformation de Gelfand $G : A \rightarrow \mathcal{C}(Sp(A))$ est un $*$ -isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Notons $G : A \rightarrow \mathcal{C}(Sp(A))$ la transformation de Gelfand. On a déjà vu que G était linéaire et multiplicative. Montrons que G préserve l'involution i.e. $G(x^*) = \overline{G(x)}$. Si $h = h^*$, $\sigma(h) \subset \mathbb{R}$ donc $\chi(h) \in \mathbb{R}$. On a alors $\chi(x+x^*) \in \mathbb{R}$ et $\chi(1/i(x-x^*)) \in \mathbb{R}$ donc $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$.

Comme tout élément x est normal, on a $\rho(x) = \|x\|$ donc $\|G(x)\| = \sup_{\chi \in Sp(A)} |\chi(x)| = \rho(x) = \|x\|$. Donc G est isométrique et donc injective.

Finalement montrons la surjectivité. Pour cela on utilise le théorème de Stone-Weierstrass. $G(A) \subset \mathcal{C}(Sp(A))$ est une sous-algèbre stable par conjugaison complexe, fermée, contient les constantes et sépare les points donc est $\mathcal{C}(Sp(A))$. $\square$

Ainsi, grâce à la transformation de Gelfand on a une classification des C^* -algèbres commutatives unifères :

Les C^* -algèbres commutatives unifères sont les $\mathcal{C}(X)$ où X est un compact.

Corollaire 1.21. *Si A est une C^* -algèbre unière, x un élément normal, alors il existe un unique $*$ -homomorphisme d'algèbres de Banach $\phi_x : \mathcal{C}(\sigma(x)) \rightarrow A$ tel que si $z \in \sigma(x)$ est l'inclusion $\sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ alors $\phi_x(z) = x$. De plus ϕ_x est une isométrie. Si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ alors $x^* = x$.*

Notation 1.22. Si A est une C^* -algèbre unière et $x \in A$ normal, pour $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ on note $\phi_x(f) = f(x)$.

Proposition 1.23. *Soit A une C^* -algèbre unière, $x \in A$ normal. Alors pour $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ on a :*

1. $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$
2. $f(x) \in A$ est normal
3. Pour tout $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(x)))$ on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
4. Soit $\pi : A \rightarrow B$ un $*$ -morphisme entre deux C^* -algèbres unifères. Alors si $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$, on a $f(\pi(x)) = \pi(f(x))$

Proposition 1.24. *Soit $\phi : A \rightarrow B$ un $*$ -morphisme. Si A est une algèbre de Banach involutif et B une C^* -algèbre unière, alors ϕ est **contractant**; en particulier **continue**. Si A est une C^* -algèbre unière aussi et si ϕ est injectif, alors ϕ est isométrique.*

1.2.1 Éléments positifs dans une C^* -algèbre

Soit A une C^* -algèbre unière. On peut munir A d'une relation d'ordre partiel. Un élément auto-adjoint x est dit **positif** si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$. On pose

$$A_+ = \{x \in A \mid x = x^* \text{ et } \sigma(x) \subset \mathbb{R}_+\}$$

Proposition 1.25. *Soit $x \in A$ auto-adjoint. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. x est positif
2. Il existe $h \in A$ auto-adjoint tel que $h^2 = x$
3. Il existe $k \in A$ tel que $x = kk^*$

Démonstration. $2 \Rightarrow 1$: Soit $f : t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $t \in A$, $\sigma(f(t)) = f(\sigma(t)) \in \mathbb{R}_+$.
 $1 \Rightarrow 2$: Soit $f : t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$. Si $x \in A$ est positif, $\sigma(x) \in \mathbb{R}_+$, et on a $x = f(x)^2$, donc $h = f(x)$ convient.
 $2 \Rightarrow 3$: Il suffit de prendre $k = h$.

Lemme 1.26. Soit A une C^* -algèbre unifère, $x \in A$ auto-adjoint. Alors

- a. $x \in A_+$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x - t\| \leq t$.
- b. A_+ est un cône convexe saillant

Démonstration du lemme. a. Soit x autoadjoint. Si il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x - t\| \leq t$, comme $\sigma(x) \subset [0, \|x\|]$, on a $\{s \in \mathbb{R} \mid \|s - t\| \leq t\} = [0, 2t]$. Donc $\|x - t\| \leq t$ si et seulement si $\sigma(x) \subset [0, 2t]$. Inversement si x est positif, $\sigma(x) \subset [-\|x\|, \|x\|]$ et il suffit de prendre par exemple $t = \frac{\|x\|}{2}$.
b.

A est un cône : Soit $s \in \mathbb{R}_+$ et $x \in A_+$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x - t\| \leq t$ et en particulier $\|sx - st\| \leq st$ et sx est clairement auto-adjoint, donc $sx \in A_+$.

A est convexe : Soient x, y deux éléments positifs de A . $x + y$ est clairement auto-adjoint. Puis il existe des réels positifs t, s tels que $\|x - t\| \leq t$ et $\|y - s\| \leq s$ donc par l'inégalité triangulaire on a $\|x + y - (t + s)\| \leq t + s$ d'où $x + y \in A_+$.

A est saillant : Si on a $-x$ et x positifs, alors $\sigma(x) = \{0\}$, et on a $\|x\| = \rho(x) = 0$. $\square$

Retournons à la démonstration de la proposition :

$3 \Rightarrow 1$: Soit $k \in A$ tel que $kk^* = x$. On pose $f : t \mapsto \inf(0, t)$ sur $\mathbb{R}$. Posons $y = kf(k^*k)$. En particulier $y^*y = f(k^*k)k^*kf(k^*k) = f(k^*k)^3$ car on a bien $f(t)^2t = f(t)^3$ pour tout t . Comme $f(t)^3 \leq 0 \forall t$, $-y^*y \in A_+$. De plus $\sigma(y^*y) = \sigma(yy^*)$ d'où $-yy^* \in A_+$ aussi. Si on écrit $y = a + ib$ avec a, b auto-adjoints, on développe et on a $yy^* + y^*y = 2(a^2 + b^2)$, donc $yy^* = -y^*y + 2(a^2 + b^2) \in A_+$. Or ce dernier est saillant, $y^*y = 0 = yy^*$. Donc $f(k^*k)^3 = 0$ et comme $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$, en particulier $\sigma(k^*k) = \sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$. $\square$

1.2.2 C^* -algèbres enveloppantes

En général, une algèbre involutive A n'est pas une C^* -algèbre. Sous une certaine hypothèse, il y a une unique C^* -algèbre dite **enveloppante** dans laquelle A est dense pour la norme de C^* algèbre.

Soit A une algèbre involutive. On rappelle qu'une semi norme p sur A est une application positive sur A qui vérifient les axiomes d'une norme sauf l'inégalité triangulaire.

Une C^* -semi norme sur A est une semi norme p qui vérifie $\forall x \in A$,

$$p(xx^*) = p(x)^2$$

Si p est une C^* -semi norme sur A , notons A_p la séparée complétée de A par p . Alors A_p est une C^* -algèbre et en notant $i : A \hookrightarrow A_p$ l'inclusion canonique, on a pour tout $x \in A$, $p(x) = \|i(x)\|$. Inversement si A est une algèbre involutive et B une C^* -algèbre, pour tout $*$ -morphisme $f : A \rightarrow B$, $p : x \mapsto \|f(x)\|$ définit une C^* -semi norme sur A .

Soit A une algèbre involutive. Maintenant remarquons que en notant S l'ensemble des semi-normes sur A , l'ensemble des $x \in A$ tel que

$$\sup_S \{p(x)\} < \infty$$

forme une sous-algèbre involutive de A que l'on note A_S .

Il n'est pas difficile de montrer que

$$x \mapsto \sup_S \{p(x)\}$$

est une C^* -semi norme sur A_S .

Soit A une algèbre involutive qui admet une plus grande C^* -semi norme p , autrement dit $A = A_S$. On appelle la C^* -algèbre enveloppante de A la séparée complétée de A par p et on la note $C^*(A)$. En particulier, comme on a vu que tout $*$ -morphisme d'une algèbre de Banach dans une C^* -algèbre est contractant, **tout algèbre de Banach involutive admet une C^* -algèbre enveloppante.**

Proposition 1.27. *Soit A une algèbre involutive qui admet une C^* -algèbre enveloppante et notons $i : A \hookrightarrow C^*(A)$ l'inclusion canonique. Alors $(C^*(A), i)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout $*$ -morphisme $f : A \rightarrow D$ où D est une C^* -algèbre, il existe un unique $*$ -morphisme $g : C^*(A) \rightarrow D$ tel que $f = g \circ i$.*

1.2.3 Représentations

Une représentation d'une C^* -algèbre A est la donnée d'un $*$ -morphisme $\pi : A \rightarrow B(H_\pi)$ où H_π est un espace de Hilbert.

On dit que π est **fidèle** si π est injective.

On dit que π est **non dégénérée** si $H_\pi = \overline{\text{Vect}(\pi(a)(h) \mid a \in A, h \in H_\pi)}$.

On admet le théorème suivant :

Théorème 1.28. *(Gelfand-Naimark) Toute C^* -algèbre admet une représentation fidèle non dégénérée.*

En particulier, ce théorème nous dit que toute C^* -algèbre est isomorphe à un sous C^* -algèbre d'un $B(H)$ où H est un espace de Hilbert. Donc les C^* -algèbres sont exactement les sous- C^* algèbres des $B(H)$.

Chapitre 2

C^* -algèbre d'un groupe discret

2.1 Groupes discrets et C^* -algèbres

Si G est un groupe topologique localement compact, on peut lui associer une C^* -algèbre. Ici pour simplifier l'étude, on se restreint aux groupes discrets. Dans toute la suite G désignera un groupe discret et on note e son élément neutre.

2.1.1 Représentations unitaires et l'algèbre de groupe

Une représentation unitaire π de G est la donnée d'un espace de Hilbert H_π et d'un homomorphisme de groupes $\pi : G \rightarrow \mathbb{U}(H_\pi)$.

Ici $\mathbb{U}(H_\pi)$ désigne le groupe d'opérateurs unitaires sur H_π .

Autrement dit, on a :

$$— \pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \circ \pi(g_2)$$

$$— \pi(e) = Id$$

$$— \pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$$

On définit l'algèbre de groupe $l^1(G)$

$$l^1(G) = \{ \sum_{g \in G} a_g \delta(g) \mid \forall g \in G, a_g \in \mathbb{C} \text{ and } \sum |a_g| < \infty \}$$

$$\text{Où } \delta_g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\|f\|_1 = \sum_{g \in G} |a_g|$$

En particulier pour une représentation unitaire π donnée, on peut étendre π sur $l^1(G)$. Pour $f = \sum_{g \in G} a_g \delta_g$,

$$\pi(f) = \sum_{g \in G} a_g \pi(g)$$

Montrons que $\pi(f)$ définit un élément de $B(H_\pi)$:

— linéarité est triviale

— $\|\sum_{g \in G} a_g \pi(g)\| \leq \sum_{g \in G} |a_g| \|\pi(g)\| \leq \sum_{g \in G} |a_g| \leq \|f\|_1$

On peut montrer que si on définit

$$\delta_g \delta_{g'} := \delta_{gg'}$$

on a une "multiplication naturelle" sur $l^1(G)$:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g\right) \left(\sum_{g' \in G} b_{g'} \delta_{g'}\right) = \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} a_g \delta_g b_{g'} \delta_{g'} = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k}\right) \delta_k$$

On pose

$$f \star h = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k}\right) \delta_k$$

la convolution de f et h. On a bien $f \star h \in l^1(G)$ car

$$\sum_{k \in G} \left| \sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k} \right| \leq \sum_{k \in G} \sum_{g \in G} |a_g b_{g^{-1}k}| \leq \sum_{g \in G} |a_g| \sum_{k \in G} |b_{g^{-1}k}| < \infty$$

De plus on a $\pi(f \star h) = \pi(f) \circ \pi(h)$:

$$\begin{aligned} \pi(f \star h) &= \sum_{k \in G} \left(\sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k}\right) \pi(k) \\ &= \sum_{g \in G} a_g \sum_{k \in G} b_{g^{-1}k} \pi(k) \\ &= \sum_{g \in G} a_g \sum_{l \in G} b_l \pi(gl) \\ &= \sum_{g \in G} a_g \sum_{l \in G} b_l \pi(g) \circ \pi(h) \\ &= \sum_{g \in G} a_g \pi(g) \left(\sum_{l \in G} b_l \pi(l)\right) \\ &= \pi(f) \circ \pi(h) \end{aligned}$$

L'élément neutre de $l^1(G)$ pour la convolution est δ_e . Ainsi on a :

Proposition 2.1. $(l^1(G), ||\cdot||_1, \star)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 2.2. $l^1(G)$ est commutatif si et seulement si G est commutatif.

Démonstration. En effet, si $f = \sum_{g \in G} a_g \delta_g$ et $h = \sum_{k \in G} b_k \delta_k$ on a

$$\begin{aligned} f \star h &= \sum_{k \in G} \left(\sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k} \right) \delta_k \\ &= \sum_{k \in G} \left(\sum_{i \in G} a_{ki^{-1}} b_i \right) \delta_k \\ &= \sum_{k \in G} \left(\sum_{i \in G} b_i a_{i^{-1}k} \right) \delta_k = h \star f \end{aligned}$$

Inversement si $l^1(G)$ est commutatif, G l'est aussi car sinon, il existerait $x, y \in G$ tel que $xy \neq yx$ donc en prenant δ_x et δ_y , on aurait que $\delta_x \star \delta_y \neq \delta_y \star \delta_x$ $\square$

Ensuite,

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g \right)^* := \sum_{g \in G} \overline{a_{g^{-1}}} \delta_g$$

définit une **involution** sur $l^1(G)$. En outre on a pour tout $f \in l^1(G)$:

$$||f||_1 = ||f^*||_1$$

On a ainsi un algèbre de Banach involutive.

Proposition 2.3. Si π est une représentation unitaire du groupe G , la représentation induite sur $l^1(G)$ est une ***-représentation** i.e. on a $\pi(f^*) = \pi(f)^*$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f)(x), y \rangle &= \langle (\sum_{g \in G} a_g \pi(g))(x), y \rangle \\
&= \sum_{g \in G} a_g \langle \pi(g)(x), y \rangle \\
&= \sum_{g \in G} a_g \langle x, \pi(g^{-1}(y)) \rangle \\
&= \langle x, \sum_{g \in G} \overline{a_g} \pi(g^{-1}(y)) \rangle \\
&= \langle x, \pi(f^*)(y) \rangle
\end{aligned}$$

□

2.1.2 C^* -algèbre de groupe

On pose :

$$\|f\|_{C^*} := \sup_{\pi \in \text{Rep}_{\text{unitaire}}(G)} \|\pi(f)\|$$

Remarque : Ce supremum est bien fini ; si on fixe $f \in l^1(G)$, comme pour tout π représentation unitaire du groupe G induit une $*$ -représentation de $l^1(G)$ que l'on note encore π , ce dernier est contractant.

Il s'agit de la plus grande semi-norme sur l'algèbre de Banach involutif $l^1(G)$. Par le théorème de Gelfand-Naimark, il suffit de prendre le sup sur les normes induites par les représentations unitaires de G . Pour tout π représentation unitaire de G

$$\|\pi(f \star h)\| = \|\pi(f) \circ \pi(h)\| \leq \|\pi(f)\| \|\pi(h)\|$$

En passant au sup, on a la sous-multiplicité de $\|\cdot\|_{C^*}$. En particulier on a pour $f \in l^1(G)$

$$\|\pi(f \star f^*)\| = \|\pi(f) \circ \pi(f)^*\| = \|\pi(f)\|^2$$

Donc comme ceci est vrai pour tout π unitaire, en passant au sup :

$$\|f \star f^*\|_{C^*} = \|f\|_{C^*}^2$$

Une fois qu'on a l'identité de norme-*, on n'a qu'à compléter $(l^1(G), \|\cdot\|_{C^*})$ afin d'obtenir le C^* -algèbre du groupe notée $C^*(G)$. D'après le théorème de Gelfand-Mazur, c'est la C^* -algèbre enveloppante de $l^1(G)$.

Remarquons aussi que par une simple application du théorème de prolongement des applications linéaires continues, on a une bijection entre les représentations de $l^1(G)$ et celles de $C^*(G)$. On a toujours $\forall f \in C^*(G)$

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C^*}$$

2.1.3 C^* -algèbre d'un groupe abélien

Comme $l^1(G)$ est commutative, la C^* -algèbre $C^*(G)$ est commutative unitaire. Alors on peut appliquer la théorie de Gelfand sur ce dernier afin de la décrire explicitement comme un certain $C(X)$ où X est un ensemble compact qui sera de plus un groupe topologique. Ainsi, la transformée de Fourier se généralise sur n'importe quel groupe (discret) abélien. Dans cette section G est supposé *dénombrable*.

Définissons un caractère de G comme un morphisme de groupes

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$$

Autrement dit

- $\forall a, b \in G, \chi(a.b) = \chi(a).\chi(b)$
- $\forall x \in G, |\chi(x)| = 1$
- $\chi(0) = 1$

Notons $\hat{G}$ l'ensemble de tous les caractères de G . En particulier $\hat{G} \subset \mathbb{T}^G$. Maintenant fixons $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sum_{g \in G} f(g) < \infty$. Il est facile de vérifier que d définie par :

$$d(\chi_1, \chi_2) = \sum_{g \in G} |\chi_1(g) - \chi_2(g)| f(g)$$

est une distance sur $\hat{G}$. La topologie métrique sur $\hat{G}$ est alors la topologie de la convergence simple induite par $\mathbb{T}^G$. Ainsi, $\hat{G}$ munie de la multiplication est un groupe topologique et est appelé le groupe dual de G . En particulier :

- $\hat{G}$ a pour l'élément neutre le morphisme constant $\mathbf{1}$
- $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}, \forall g \in G$

Exemple 2.4. $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$

χ étant un morphisme de groupes, il est entièrement déterminé par $\chi(1) : \forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \chi(1)^k$.

Proposition 2.5. $\hat{G} \cong Sp(C^*(G))$

Démonstration. On montre que

$$\begin{aligned} \varphi : Sp(l^1(G)) &\rightarrow \hat{G} \\ \chi &\rightarrow \chi|_G \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Soit $\chi \in Sp(C^*(G)) :$

$$\chi : l^1(G) \mapsto \mathbb{C}$$

un morphisme multiplicatif involutif non nul, continue. On en déduit que $\chi(\delta_g) \in \mathbb{T}$ et donc $\chi|_G \in \hat{G}$. Inversement si $\chi \in \hat{G}$ alors on prolonge χ sur $l^1(G)$ par :

$$\chi\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g\right) := \sum_{g \in G} a_g \chi(g)$$

Ainsi on a une bijection. Il s'agit d'un homéomorphisme car les deux espaces sont munis de la topologie de la convergence simple.

Le dernier point à montrer est : $Sp(l^1(G)) \cong Sp(C^*(G))$. D'une part si $\chi \in Sp(C^*(G))$, $\chi|_{l^1(G)}$ définit un élément de $Sp(l^1(G))$. D'autre part notons $i : l^1(G) \hookrightarrow C^*(G)$ l'injection canonique et utilisons la propriété universelle de la $(C^*(G), i)$; pour $\chi : l^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ il existe une unique *-morphisme $\tilde{\chi} : C^*(G) \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\chi = \tilde{\chi} \circ i$. Tout cela conclut que

$$Sp(C^*(G)) \cong \hat{G}$$

□

En particulier $\hat{G}$ est **compact**. Finalement par le théorème de Gelfand, on a $C^*(G)$ qui s'identifie avec $\mathcal{C}(Sp(C^*(G))) \cong \mathcal{C}(\hat{G})$

Conclusion : Si G est un groupe discret abélien, alors

$$C^*(G) \cong \mathcal{C}(\hat{G})$$

2.1.4 Cas des groupes abéliens finis

Dans cette partie nous supposons que G est un groupe abélien fini et nous décrivons $\hat{G}$.

Lemme 2.6. *Si G_1, G_2 sont deux groupes tels que $G_1 \cong G_2$, alors $\hat{G}_1 \cong \hat{G}_2$.*

Démonstration. Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ l'isomorphisme. Alors $\phi : \hat{G}_1 \rightarrow \hat{G}_2$ défini par $\phi(\chi) = \chi \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme de groupes. $\square$

Proposition 2.7. $(\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Démonstration. Pour $\chi \in \hat{G}$ on a pour tout $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\chi(\bar{k}) = \chi(\bar{1})^k$$

et

$$\chi(\bar{n}) = \chi(1)^n = 1$$

Donc $\hat{G}$ est cyclique et abélien d'ordre n . Inversement, si $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine n -ième de l'unité, $\chi : \bar{k} \mapsto \alpha^k$ définit un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi :

$$(\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Par le lemme on a pour tout G abélien cyclique,

$$\hat{G} \cong G.$$

$\square$

La classification des groupes abéliens finis simplifie alors l'étude des groupes abéliens quelconques.

Proposition 2.8. *Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers naturels $n_1, \dots, n_r$ tel que les entiers n_i sont ou bien des puissances des nombres premiers, ou bien n_i divise n_{i+1} et*

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$

Exemples 2.9. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

Un groupe abélien à 8 éléments est dans $\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$.

On a aussi :

Proposition 2.10. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. On a

$$(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) = (\widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}}) \oplus (\widehat{\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}})$$

Démonstration. On a pour $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $\chi \in (\widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}})$,

$$\chi((\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = \chi((\bar{x}_1, 0)) \cdot \chi((0, \bar{x}_2))$$

Pour $i = 1, 2$ la restriction de χ définit un caractère de $(\widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}})$:

$$\chi_i(\bar{x}_i) =: \chi((0, \bar{x}_i)) \quad (2.1)$$

Tout χ se décompose uniquement en les $\chi_i \in (\widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}})$. Inversement, si pour $i = 1, 2$ on a $\chi_i \in (\widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}})$, on pose $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ qui est un caractère de $(\widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}})$. Donc

$$\chi \mapsto (\chi_1, \chi_2)$$

définit un isomorphisme de groupes. □

Corollaire 2.11. Si G est abélien fini, on a $\hat{G} \cong G$

Démonstration. Écrivons

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$

Alors par ce qui précède

$$\begin{aligned} \hat{G} &\cong \bigoplus_{i=1}^r (\widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \\ &\cong G \end{aligned}$$

□

On conclut que si G est un groupe abélien fini, on a

$$C^*(G) \cong \mathcal{C}(G)$$

2.1.5 Cas des groupes finis non abéliens

Qu'est ce qui se passe lorsque le groupe est fini mais non abélien ?

Soit G un groupe fini d'ordre n , pas nécessairement abélien. Alors l'algèbre de groupe $l^1(G) = \mathbb{C}[G]$ où $\mathbb{C}[G] = Vect(\delta_{g_i} | 1 \leq i \leq n)$ En particulier c'est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de **dimension** $|G|$, donc $(l^1(G), ||\cdot||_{C^*})$ est complet. Ainsi on a :

$$C^*(G) = \mathbb{C}[G]$$

Le but est de décomposer $C^*(G)$ en des C^* -algèbres qui sont des algèbres de matrices. On commence par considérer le centre $Z(C^*(G)) = \{f \in C^*(G) \mid f \star h = h \star f \forall h \in C^*(G)\}$. Ensuite il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} f \in Z(C^*(G)) &\Leftrightarrow \delta_g \star f \star \delta_g^{-1} \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow f(g^{-1}xg) = f(x) \forall x, g \in G \end{aligned}$$

Ainsi $f \in Z(C^*(G))$ si et seulement si f est constante sur les classes d'équivalence de G pour la conjugaison. Or G étant fini, notons k le nombre de classes d'équivalences. Dans ce cas $Z(C^*(G))$ est un C^* -algèbre commutative de dimension k .

C^* -algèbres de dimension finie

1. Une C^* -algèbre de dimension finie est unifère :

Soit A une C^* -algèbre de dimension finie, et soit $x_1, \dots, x_n$ une base de A . Posons $h = \sum x_i x_i^*$. Soit $a \in A$. Si $ah = 0$, alors $aha^* = 0$, donc $\sum (ax_i)(ax_i)^* = 0$. la somme de tous ces éléments positifs étant nulle, ils sont tous nuls donc $ax_i = 0$ pour tout i , et par linéarité, $ab = 0$ pour tout b , et enfin $aa^* = 0$, donc $a = 0$. L'application $a \mapsto ah$ de A dans A est injective - donc bijective. L'application $a \mapsto ha = (a^*h)^*$ est la composée de $j : a \mapsto a^*$ de $b \mapsto bh$ et de j : elle est bijective. Donc, il existe $e \in A$ tel que $eh = h$ et, si $b \in A$, il existe c tel que $b = hc$, donc $eb = ehc = hc = b$. Alors e est une unité à gauche - et e^* est une unité à droite - alors $e = e^*$ et est l'unité de A .

2. Si A est commutative, alors $A = \mathcal{C}(X)$ où X est de cardinal k , donc $A \simeq \mathbb{C}^k$.

3. Si A est de dimension finie ≥ 2 il existe un projecteur q (idempotent autoadjoint) distinct de 1_A et de 0 . Il existe $x \in A - \mathbb{C}1_A$. Alors $x + x^*$ ou

$1/i(x - x^*)$ n'est pas proportionnel à 1_A et il existe donc $y = y^*$ dans A non proportionnel à 1_A . Alors la sous-algèbre B de qAq engendrée par q et y est une C^* -algèbre commutative - donc un $\mathbb{C}^k$ - et comme elle est de dimension ≥ 2 (elle contient 1 et y qui ne sont pas proportionnels), elle a un projecteur - q différent de 0 et de 1_A (qui correspond à un sous-ensemble du spectre de B)

4. Si A est de dimension finie non nulle, il existe un projecteur q (idempotent autoadjoint) non nul tel que $qAq = \mathbb{C}q$. En effet, on choisit un projecteur $q \in A$ tel que $\dim(qAq)$ soit de dimension minimale. Remarquons que qAq est une C^* -algèbre (et q est son unité). Si $qAq \neq \mathbb{C}q$, il existe un projecteur q' dans qAq différent de 0 et de q et $q'Aq'$ est une sous algèbre de qAq , donc de dimension strictement plus petite (car $q \notin q'Aq'$).

5. Si $Z(A) = \mathbb{C}1_A$, alors $A \simeq M_k(\mathbb{C})$: En effet soit q tel que $qAq = \mathbb{C}q$. Maintenant considérons le produit scalaire sur A_i défini par $x^*y = \langle x, y \rangle_q \forall x, y \in A$ qui fait de Aq un espace de Hilbert de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de A_iq . Posons $f : A \rightarrow \mathcal{L}(Aq)$ l'application tel que $f(a)(x) = ax$. De plus $\text{Im}(f)$ contient la base canonique de $\mathcal{L}(Aq)$. En effet on a

$$(e_i e_j^*) e_l = \langle e_j, e_l \rangle_q e_i = \delta_{j,l} e_i$$

donc f est surjectif. D'autre part, si e est l'unité de $\ker f$, alors $e = e^*$ et, pour tout $x \in A$, $xe \in \ker f$ donc $exe = xe$ (car e est l'unité de $\ker f$). En particulier $ex^*e = x^*e$, puis, prenant les adjoints, on a $ex = exe$, donc $ex = xe$. Donc $e \in Z(A) = \mathbb{C}1_A$. Or $q \neq 0$ donc $1_A \notin \ker f$, et $e = 0$. Alors f est injective. Donc comme $\mathcal{L}(Aq) \cong M_k(\mathbb{C})$, on a $A \cong M_k(\mathbb{C})$

6. Enfin on a : $A \simeq \bigoplus M_{k_i}(\mathbb{C})$; En effet écrivons $Z(A) = C(X)$ avec $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. On note $p_i \in Z(A)$ la fonction qui vaut 1 en x_i et 0 ailleurs. Alors p_i est l'unité de la sous C^* -algèbre $p_i A$ et $Z(p_i A) = \mathbb{C}p_i$. Comme $A = \bigoplus p_i A$, on conclut.

Conclusion Si G est un groupe fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ et des entiers naturels $n_1, \dots, n_k$ tels que

$$C^*(G) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$$

Exemple 2.12. Ainsi lorsque G est fini, le C^* -algèbre de G qui est $\mathbb{C}[G]$ se réalise comme la somme directe (finie) des algèbres de matrices.

Illustrons ces résultats sur un exemple. Prenons $G = \mathcal{S}_3$. Comme $\mathcal{S}_3$ est de cardinal 6, $C^*(G)$ est de dimension 6 et n'est pas abélien. Il y a deux C^* -algèbres de dimension 6 :

— $\mathbb{C}^{\oplus 6}$

— $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$

La première étant commutative, on n'a qu'un choix.

$$C^*(\mathcal{S}_3) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$$

Bibliographie

- [*Skandalis*] G. Skandalis - C^* -algèbres (Université Paris Cité)
- [*Williams*] D. Williams - A (Very) Short course on C^* -algebras (Dartmouth College)
- [*Follan*] Gerald B. Follan - A Course in Abstract Harmonic Analysis (CRS Press)
- [*Rudin*] W. Rudin - Fourier Analysis on groups (Interscience Publishers)